3.4
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 122 – 124

Α΄ Ομάδας

1.
Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(i) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(– 13, 0), Ε(13, 0) και κορυφές τα σημεία Α(5, 0) και Α΄(– 5, 0).

(ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄(0, – 10), Ε(0, 10) και εκκεντρότητα $\frac{5}{3}$

(iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία Ε΄($-\sqrt{5}$, 0), Ε($\sqrt{5}$, 0) και διέρχεται από το σημείο Μ($2\sqrt{2}$, 1)

(iv) Όταν έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$ και διέρχεται από το σημείο Μ($3\sqrt{2}$, 4)

Λύση

(i)

Είναι γ = 13 και α = 5, οπότε $\beta^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, $C : \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$

(ii)

Είναι γ = 10 και $\varepsilon = \frac{5}{3}$, οπότε $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{10}{\alpha} = \frac{5}{3} \Rightarrow \alpha = 6$

$\beta^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 366 = 64$, $C : \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$

(iii)

Έστω $C : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2\beta^2$

$$(\gamma^2 - \alpha^2)x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\gamma^2 - \alpha^2)$$
$$(5 - \alpha^2)x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2(5 - \alpha^2)$$

$M(2\sqrt{2}, 1) \in C \Leftrightarrow (5 - \alpha^2)(2\sqrt{2})^2 - \alpha^2 1^2 = \alpha^2(5 - \alpha^2)$

$$(5 - \alpha^2)8 - \alpha^2 = \alpha^2(5 - \alpha^2)$$
$$40 - 8\alpha^2 - \alpha^2 = 5\alpha^2 - \alpha^4$$
$$\alpha^4 - 14\alpha^2 + 40 = 0$$

$\Delta = 196 - 160 = 36$ $\qquad \alpha^2 = \frac{14 \pm 6}{2} = 10$ ή 4

- Για $\alpha^2 = 10 > 5 = \gamma^2$ δεν υπάρχει υπερβολή.
- Για $\alpha^2 = 4$ έχουμε $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 5 - 4 = 1$, άρα $C : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

(iv)

- Έστω $C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$

$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \beta = \dfrac{4}{3}\alpha$, οπότε $C: \dfrac{16}{9}\alpha^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \dfrac{16}{9}\alpha^2$

$$16\alpha^2 x^2 - 9\alpha^2 y^2 = 16\alpha^4$$

$$16x^2 - 9y^2 = 16\alpha^2$$

$M(3\sqrt{2}, 4) \in C \Leftrightarrow 16(3\sqrt{2})^2 - 9\,4^2 = 16\alpha^2$

$$16 \cdot 18 - 9 \cdot 16 = 16\alpha^2$$

$$18 - 9 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

$\beta = \dfrac{4}{3}\alpha \Rightarrow \beta = 4$

Άρα $C: \dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

- Έστω $C: \dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 y^2 - \alpha^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{4}{3}\beta$, οπότε $C: \beta^2 y^2 - \dfrac{16}{9}\beta^2 x^2 = \dfrac{16}{9}\beta^2 \beta^2$

$$9\beta^2 y^2 - 16\beta^2 x^2 = 16\beta^4$$

$$9y^2 - 16x^2 = 16\beta^2$$

$M(3\sqrt{2}, 4) \in C \Leftrightarrow 9 \cdot 4^2 - 16(3\sqrt{2})^2 = 16\beta^2$

$$9 \cdot 16 - 16 \,.\, 18 = 16\beta^2$$

$$9 - 18 = \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 = -2 < 0 \text{ άτοπο.}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοια υπερβολή.

2.
Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής :

(i) $9x^2 - 16y^2 = 144$

(ii) $x^2 - y^2 = 4$

(iii) $144x^2 - 25y^2 = 3600$

Λύση

(i)

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$\alpha = 4, \quad \beta = 3, \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow 9 = \gamma^2 - 16 \Rightarrow \gamma^2 = 25 \Rightarrow \gamma = 5$

Εστίες : $E'(-5, 0), \quad E(5, 0)$

Εκκεντρότητα : $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4}$

Ασύμπτωτες : $y = \frac{\beta}{\alpha}x, \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x, \quad y = -\frac{3}{4}x$

(ii)

$$x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$\alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow$

$4 = \gamma^2 - 4 \Rightarrow$

$\gamma^2 = 8 \Rightarrow \gamma = 2\sqrt{2}$

Εστίες : $E'(-2\sqrt{2}, 0), \quad E(2\sqrt{2}, 0)$

Εκκεντρότητα : $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Ασύμπτωτες : $y = \frac{\beta}{\alpha}x, \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = \frac{2}{2}x, \quad y = -\frac{2}{2}x \Leftrightarrow$

$y = x, \quad y = -x$

(iii)

$$144x^2 - 25y^2 = 3600 \Leftrightarrow \frac{144x^2}{3600} - \frac{25y^2}{3600} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$$

$\alpha = 5, \quad \beta = 12, \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow$

$144 = \gamma^2 - 25 \Rightarrow$

$\gamma^2 = 169 \Rightarrow \gamma = 13$

Εστίες : $E'(-13, 0), \quad E(13, 0)$ Εκκεντρότητα : $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{13}{5}$

Ασύμπτωτες : $y = \frac{\beta}{\alpha}x, \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = \frac{12}{5}x, \quad y = -\frac{12}{5}x$

3.

Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, της οποίας η ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30^o.

Λύση

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ασύμπτωτης θα είναι

$$\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = \alpha\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{3}\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\gamma^2 - \alpha^2 = \frac{1}{3}\alpha^2 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{4}{3}\alpha^2 \Rightarrow \gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4.

Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στην κορυφή $A(\alpha, 0)$ τέμνει την ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι (ΟΕ) = (ΟΓ).

Λύση

Η εφαπτομένη της υπερβολής στο $A(\alpha, 0)$ έχει εξίσωση $x = \alpha$.

Η $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ για $x = \alpha$ δίνει $y = \beta$. Άρα $\Gamma(\alpha, \beta)$

$$(OE) = (O\Gamma) \Leftrightarrow (OE)^2 = (O\Gamma)^2$$

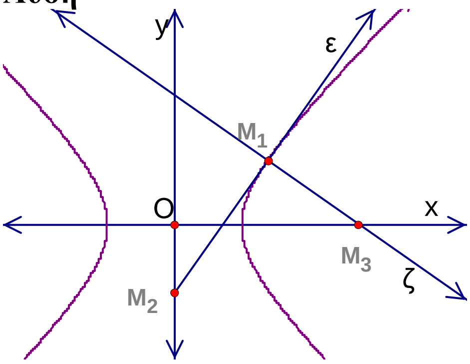
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2$$ που ισχύει.

5.

Έστω η υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, ε η εφαπτομένη της σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ και ζ η κάθετη της ε στο M_1. Αν η ε διέρχεται από το σημείο $M_2(0, -\beta)$ και η ζ διέρχεται από το σημείο $M_3(2\alpha\sqrt{2}, 0)$, να αποδείξετε ότι η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι ίση με $\sqrt{2}$.

Λύση



$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$$

$$\varepsilon: \quad \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2$$

$$M_2(0, -\beta) \in \varepsilon \Rightarrow$$
$$\beta^2 x_1 \cdot 0 - \alpha^2 y_1(-\beta) = \alpha^2 \beta^2 \Rightarrow$$
$$y_1 = \beta$$

$$\zeta \perp \varepsilon \Rightarrow \lambda_\zeta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \lambda_\zeta \cdot \frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1} = -1 \Rightarrow$$

$$\lambda_\zeta = -\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1} = -\frac{\alpha^2 \beta}{\beta^2 x_1} = -\frac{\alpha^2}{\beta x_1}$$

$$\zeta: \quad y - y_1 = \lambda_\zeta (x - x_1) \Leftrightarrow y - \beta = -\frac{\alpha^2}{\beta x_1}(x - x_1)$$

$$M_3(2\alpha\sqrt{2}, 0) \in \zeta \Rightarrow 0 - \beta = -\frac{\alpha^2}{\beta x_1}(2\alpha\sqrt{2} - x_1)$$
$$\beta^2 x_1 = 2\alpha^3\sqrt{2} - \alpha^2 x_1$$
$$\beta^2 x_1 + \alpha^2 x_1 = 2\alpha^3\sqrt{2}$$
$$(\beta^2 + \alpha^2) x_1 = 2\alpha^3\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2\alpha^3\sqrt{2}}{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{2\alpha^3\sqrt{2}}{\gamma^2}$$

$$M_1 \in \text{στην υπερβολή} \Rightarrow \beta^2 x_1^2 - \alpha^2 y_1^2 = \alpha^2 \beta^2$$
$$\beta^2 \frac{4\alpha^6 2}{\gamma^4} - \alpha^2 \beta^2 = \alpha^2 \beta^2$$
$$\frac{8\alpha^6}{\gamma^4} - \alpha^2 = \alpha^2$$
$$\frac{8\alpha^6}{\gamma^4} = 2\alpha^2 \Rightarrow 4\alpha^4 = \gamma^4 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^4 = 4 \Rightarrow \varepsilon^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{2}$$

6.

Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που είναι παράλληλη προς μια από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει την υπερβολή σε ένα μόνο σημείο. Ποιο είναι το σημείο τομής της ευθείας $2x - y = 1$ και της υπερβολής $4x^2 - y^2 = 1$;

Λύση

Μια ασύμπτωτη είναι $y = \frac{\beta}{\alpha}x$.

Μια παράλληλος της είναι $y = \frac{\beta}{\alpha}x + \mu$ **(1)**

Η υπερβολή γράφεται $\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ **(2)**

Σύστημα των (1), (2) για να έχουμε τα κοινά σημεία τους.

$$(2) \Rightarrow \beta^2 x^2 - \alpha^2\left(\frac{\beta}{\alpha}x + \mu\right)^2 = \alpha^2\beta^2$$

$$\beta^2 x^2 - \alpha^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x\mu + \mu^2\right) = \alpha^2\beta^2$$

$$\beta^2 x^2 - \beta^2 x^2 - 2\alpha\beta\mu x - \alpha^2\mu^2 = \alpha^2\beta^2$$

$$2\alpha\beta\mu x = -\alpha^2\mu^2 - \alpha^2\beta^2 \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\alpha(\mu^2 + \beta^2)}{2\beta\mu}$$ μοναδική λύση, άρα μοναδικό σημείο τομής.

Σύστημα των εξισώσεων $2x - y = 1$ **(3)** και $4x^2 - y^2 = 1$ **(4)**

$(3) \Leftrightarrow y = 2x - 1$

$(4) \Leftrightarrow 4x^2 - (2x - 1)^2 = 1$

$4x^2 - (4x^2 - 4x + 1) = 1$

$4x^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 1$

$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Άρα $y = 2.\frac{1}{2} - 1 \Rightarrow y = 0.$ Σημείο τομής το $K\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

7.

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ οι οποίες:

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = x + 1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = -\frac{4}{\sqrt{3}}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο $M(3, 0)$

Λύση

(i)

Έστω $\varepsilon:\ x_1x - 4y_1y = 12$ ζητούμενη εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$, όπου $M_1(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής $\Rightarrow$

$$\lambda_\varepsilon = 1 \Rightarrow \frac{x_1}{4y_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 4y_1$$

$M_1 \in$ στην υπερβολή $\Leftrightarrow$

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 12$$
$$(4y_1)^2 - 4y_1^2 = 12$$
$$16y_1^2 - 4y_1^2 = 12$$
$$12y_1^2 = 12$$
$$y_1^2 = 1 \Leftrightarrow y_1 = 1 \text{ ή } y_1 = -1$$

- Για $y_1 = 1$, η $x_1 = 4y_1 \Rightarrow x_1 = 4$, άρα $\varepsilon:\ 4x - 4y = 12 \Leftrightarrow$
  $x - y = 3$
- Για $y_1 = -1$, η $x_1 = 4y_1 \Rightarrow x_1 = -4$, άρα $\varepsilon:\ -4x + 4y = 12 \Leftrightarrow$
  $-x + y = 3$

(ii)

Έστω $\varepsilon:\ x_1x - 4y_1y = 12$ ζητούμενη εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{4}{\sqrt{3}}x$, όπου $M_1(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής $\Rightarrow$

$$\lambda_\varepsilon\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -1 \Rightarrow \frac{x_1}{4y_1}\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -1 \Rightarrow 4x_1 = 4y_1\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = y_1\sqrt{3}$$

$M_1 \in$ στην υπερβολή $\Leftrightarrow$

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 12$$
$$(y_1\sqrt{3})^2 - 4y_1^2 = 12$$
$$3y_1^2 - 4y_1^2 = 12 \Leftrightarrow -y_1^2 = 12 \text{ αδύνατη.}$$

Άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη κάθετη στη ευθεία $y = -\frac{4}{\sqrt{3}}x$

(iii)

Έστω $\varepsilon:\ x_1x - 4y_1y = 12$ ζητούμενη εφαπτομένη, που να διέρχεται από το σημείο $M(3, 0)$, όπου $M_1(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

$$M(3, 0) \in \varepsilon \Leftrightarrow x_1 \cdot 3 - 4y_1 \cdot 0 = 12 \Leftrightarrow x_1 = 4$$

$M_1 \in$ στην υπερβολή $\Leftrightarrow$

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 12$$
$$4^2 - 4y_1^2 = 12$$
$$16 - 4y_1^2 = 12$$

$$4y_1^2 = 4 \Leftrightarrow y_1^2 = 1 \Leftrightarrow y_1 = 1 \text{ ή } y_1 = -1$$

Άρα $\varepsilon:\ 4x - 4y = 12$ ή $4x + 4y = 12 \Leftrightarrow$

$x - y = 3$ ή $x + y = 3$

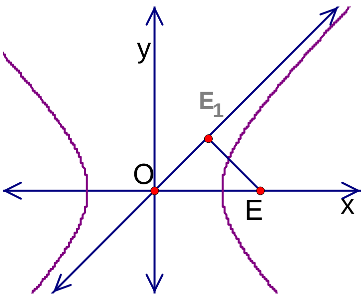
Β΄ Ομάδας

1.

Αν E_1 είναι η προβολή της εστίας E της υπερβολής $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ πάνω στην ασύμπτωτη $y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$, να αποδείξετε ότι

(i) $(OE_1) = \alpha$, **(ii)** $(EE_1) = \beta$

Λύση



(i)

$EE_1 \perp$ στην ασύμπτωτη $\Rightarrow \lambda_{EE_1} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$.

$EE_1:\quad y - 0 = -\dfrac{\alpha}{\beta}(x - \gamma) \Leftrightarrow$

$\beta y = -\alpha x + \alpha\gamma \Leftrightarrow$

$\alpha x + \beta y - \alpha\gamma = 0$

$$(OE_1) = d(0,\ EE_1) = \frac{|\alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 - \alpha\gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\gamma^2}} = \frac{\alpha\gamma}{\gamma} = \alpha$$

(ii)

Ασύμπτωτη $\zeta:\ y = \dfrac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow \beta x - \alpha y = 0$

$$(EE_1) = d(E,\ \zeta) = \frac{|\beta\cdot\gamma - \alpha\cdot 0|}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\gamma^2}} = \frac{\beta\gamma}{\gamma} = \beta$$

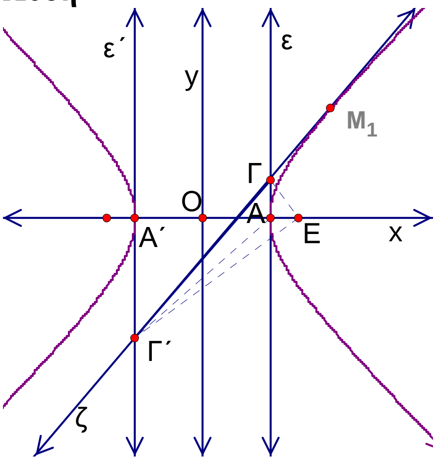
2.

Έστω ε και ε΄ οι εφαπτόμενες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στις κορυφές της Α και Α΄. Αν Γ και Γ΄ είναι τα σημεία στα οποία μια τρίτη εφαπτομένη της υπερβολής τέμνει τις ε και ε΄, αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι

(i) $(\text{ΑΓ})(\text{Α΄Γ΄}) = \beta^2$ και

(ii) ο κύκλος με διάμετρο ΓΓ΄ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.

Λύση



$\zeta: \ \beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2$

Συντεταγμένες του Γ :

Για $x = \alpha$, η ζ δίνει

$\beta^2 x_1 \alpha - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2 \beta^2 \Rightarrow$

$\beta^2 x_1 - \alpha y_1 y = \alpha \beta^2 \Rightarrow$

$\alpha y_1 y = \beta^2 x_1 - \alpha \beta^2 \Rightarrow y = \frac{\beta^2 (x_1 - \alpha)}{\alpha y_1}$

Άρα $\Gamma\left(\alpha, \frac{\beta^2 (x_1 - \alpha)}{\alpha y_1}\right)$

Ομοίως βρίσκουμε $\Gamma'\left(-\alpha, \frac{\beta^2 (x_1 + \alpha)}{\alpha y_1}\right)$

(i)

$(\text{ΑΓ})(\text{Α΄Γ΄}) = \beta^2 \Leftrightarrow \left|\frac{\beta^2 (x_1 - \alpha)}{\alpha y_1}\right| \left|\frac{\beta^2 (x_1 + \alpha)}{\alpha y_1}\right| = \beta^2$

$\beta^2 \left| x_1^2 - \alpha^2 \right| = \alpha^2 y_1^2$ $\qquad x_1 \le -\alpha$ ή $x_1 \ge \alpha$

$\beta^2 (x_1^2 - \alpha^2) = \alpha^2 y_1^2$ $\qquad |x_1| \ge \alpha$

$\beta^2 x_1^2 - \beta^2 \alpha^2 = \alpha^2 y_1^2$ $\qquad x_1^2 \ge \alpha^2$

$\beta^2 x_1^2 - \alpha^2 y_1^2 = \beta^2 \alpha^2$

ισχύει αφού $M_1 \in$ στην υπερβολή

(ii)

Ο κύκλος με διάμετρο το ΓΓ΄ διέρχεται από την εστία Ε(γ, 0) της έλλειψης $\Leftrightarrow$

$\Gamma'\hat{E}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow \overrightarrow{E\Gamma} \perp \overrightarrow{E\Gamma'} \Leftrightarrow \overrightarrow{E\Gamma} \cdot \overrightarrow{E\Gamma'} = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - \gamma)(-\alpha - \gamma) + \left(\frac{\beta^2 (x_1 - \alpha)}{\alpha y_1} - 0\right)\left(\frac{\beta^2 (x_1 + \alpha)}{\alpha y_1} - 0\right) = 0$$

$$\gamma^2 - \alpha^2 + \frac{\beta^4 (x_1^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 y_1^2} = 0$$

$$\beta^2 + \frac{\beta^4 (x_1^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 y_1^2} = 0$$

$$-1 + \frac{\beta^2 (x_1^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 y_1^2} = 0$$

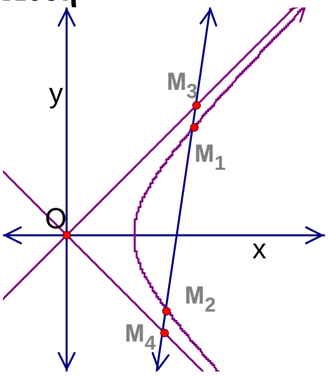
$$-\alpha^2\, y_1^2 + \beta^2\, x_1^2 - \beta^2\, \alpha^2 = 0$$

$$\beta^2\, x_1^2 - \alpha^2\, y_1^2 = \beta^2\, \alpha^2 \quad \text{που ισχύει αφού} \quad M_1 \in \text{στην έλλειψη}$$

3.

Έστω $M_1(x_1,\, y_1)$, $M_2(x_2,\, y_2)$ δύο σημεία του δεξιού κλάδου της υπερβολής $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$. Αν η ευθεία $M_1 M_2$ τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία $M_3(x_3,\, y_3)$ και $M_4(x_4,\, y_4)$, να αποδείξετε ότι $(M_1 M_3) = (M_2 M_4)$

Λύση



- Όταν $M_1 M_2 \parallel y'y$
  Λόγω συμμετρίας της υπερβολής και των ασυμπτώτων ως προς τον άξονα $x'x$, θα είναι $(M_1 M_3) = (M_2 M_4)$.

- Όταν $M_1 M_2 \nparallel y'y$
  Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τμήματα $M_1 M_2$, $M_3 M_4$ έχουν το ίδιο μέσο.

Έστω $y = \lambda x + \mu$ η ευθεία $M_1 . M_2$.

Οι συντεταγμένες των M_1, M_2 είναι οι λύσεις του συστήματος των

$$y = \lambda x + \mu \quad \textbf{(1)} \quad \text{και} \quad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \iff \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \quad \textbf{(2)}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \Rightarrow \quad & \beta^2 x^2 - \alpha^2 (\lambda x + \mu)^2 = \alpha^2 \beta^2 \\ & \beta^2 x^2 - \alpha^2 (\lambda^2 x^2 + 2\lambda x\mu + \mu^2) = \alpha^2 \beta^2 \\ & \beta^2 x^2 - \alpha^2 \lambda^2 x^2 - 2\lambda\mu\alpha^2 x - \alpha^2 \mu^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0 \\ & (\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2) x^2 - 2\lambda\mu\alpha^2 x - (\alpha^2 \mu^2 + \alpha^2 \beta^2) = 0 \quad \text{έχει ρίζες } x_1,\ x_2 . \end{aligned}$$

Έστω K το μέσο του τμήματος $M_1 M_2$. Τότε

$$x_K = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{-2\lambda\mu\alpha^2}{2(\beta^2 - \alpha^2\lambda^2)} = \frac{\lambda\mu\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2\lambda^2} \quad \textbf{(3)}$$

Οι συντεταγμένες του M_3 είναι η λύση του συστήματος των

$$y = \lambda x + \mu \quad \textbf{(1)}, \qquad y = \frac{\beta}{\alpha} x \iff \alpha y = \beta x \quad \textbf{(4)}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \Rightarrow \quad & \alpha(\lambda x + \mu) = \beta x \\ & \alpha\lambda x + \alpha\mu = \beta x \\ & \alpha\mu = \beta x - \alpha\lambda x \\ & \alpha\mu = (\beta - \alpha\lambda)x \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{\alpha\mu}{\beta - \alpha\lambda} \end{aligned}$$

Ομοίως $\qquad x_4 = -\dfrac{\alpha\mu}{\beta + \alpha\lambda}$

Έστω Λ το μέσο του τμήματος $M_3 M_4$. Τότε

$$x_\Lambda = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\mu}{\beta-\alpha\lambda} - \frac{\alpha\mu}{\beta+\alpha\lambda}\right) = \frac{1}{2}\alpha\mu\left(\frac{1}{\beta-\alpha\lambda} - \frac{1}{\beta+\alpha\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\mu\,\frac{\beta+\alpha\lambda-\beta+\alpha\lambda}{\beta^2-\alpha^2\lambda^2} = \frac{1}{2}\alpha\mu\,\frac{2\alpha\lambda}{\beta^2-\alpha^2\lambda^2} = \frac{\lambda\mu\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2\lambda^2} \quad \textbf{(5)}$$

(3), (5) $\Rightarrow$ $x_K = x_\Lambda$ **(6)**

Επειδή τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4, K, Λ ανήκουν στην ευθεία $y = \lambda x + \mu$, θα είναι

$y_1 = \lambda x_1 + \mu$, $y_2 = \lambda x_2 + \mu$, $y_3 = \lambda x_3 + \mu$, $y_4 = \lambda x_4 + \mu$,

$y_K = \lambda x_K + \mu$, $y_\Lambda = \lambda x_\Lambda + \mu$

$$y_\Lambda = \frac{1}{2}(y_3 + y_4) = \frac{1}{2}(\lambda x_3 + \mu + \lambda x_4 + \mu) = \frac{1}{2}[\lambda(x_3 + x_4) + 2\mu]$$

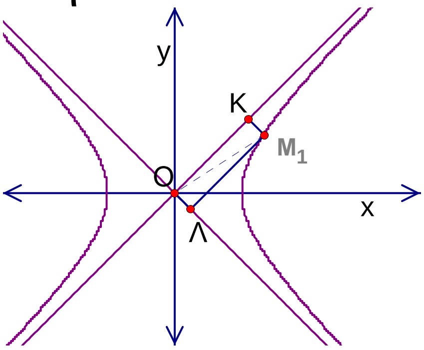
$$= \frac{1}{2}[\lambda(2x_\Lambda) + 2\mu] = \lambda x_\Lambda + \mu = \lambda x_K + \mu = y_K \quad \text{δηλαδή} \quad y_\Lambda = y_\Lambda \quad \textbf{(7)}$$

Από τις (6), (7) $\Rightarrow$ $K \equiv \Lambda$.

4.

Από ένα σημείο $M_1(x_1,\ y_1)$ της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ φέρνουμε παράλληλες προς τις ασύμπτωτες. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου παραλληλόγραμμου είναι σταθερό.

Λύση



Έστω $M_1K O\Lambda$ το παραλληλόγραμμο.

$M_1K \parallel$ στην ασύμπτωτη $y=-\frac{\beta}{\alpha}x \Rightarrow$

$\lambda_{M_1K}=-\frac{\beta}{\alpha}$.

Εξίσωση της M_1K: $y-y_1=-\frac{\beta}{\alpha}(x-x_1)$ **(1)**

Εξίσωση της OK: $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ **(2)**

Σύστημα των (1), (2) για να βρούμε τις συντεταγμένες του K.

Βάσει της (2), η (1) γράφεται $\frac{\beta}{\alpha}x-y_1=-\frac{\beta}{\alpha}(x-x_1)$

$\beta x-\alpha\, y_1=-\beta x+\beta x_1$

$2\beta x=\alpha\, y_1+\beta x_1$ Άρα $x_K=\frac{1}{2\beta}(\alpha\, y_1+\beta x_1)$

(2) $\Rightarrow$ $y_K=\frac{\beta}{\alpha}x_K=\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1}{2\beta}(\alpha\, y_1+\beta x_1)=\frac{1}{2\alpha}(\alpha\, y_1+\beta x_1)$

$$(M_1KO\Lambda)=2(KOM_1)=\left|\det(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OM_1})\right|=$$

$$=\left|\begin{vmatrix}\frac{1}{2\beta}(\alpha y_1+\beta x_1) & \frac{1}{2\alpha}(\alpha y_1+\beta x_1)\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\beta}(\alpha\, y_1+\beta x_1)y_1-\frac{1}{2\alpha}(\alpha\, y_1+\beta x_1)x_1\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(\alpha\, y_1+\beta x_1)\left(\frac{y_1}{\beta}-\frac{x_1}{\alpha}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2}(\alpha\, y_1+\beta x_1)\frac{\alpha y_1-\beta x_1}{\alpha\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\alpha\beta}(\alpha^2y_1^2-\beta^2x_1^2)\right|\overset{*}{=}$$

$$=\left|\frac{1}{2\alpha\beta}(-\alpha^2\beta^2)\right|=\left|-\frac{1}{2}\alpha\beta\right|=\frac{1}{2}\alpha\beta \text{ σταθερό.}$$

* Είναι $\alpha^2y_1^2-\beta^2x_1^2=-1$ δηλαδή $\beta^2x_1^2-\alpha^2y_1^2=1$, αφού το M_1 ανήκει στην υπερβολή

5.

Να αποδείξετε ότι το συνημίτονο μιας από τις γωνίες των ασυμπτώτων της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ δίνεται από τον τύπο συνφ = $\frac{2-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$.

Λύση

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{u}=(\alpha,\beta)\parallel$ στην ασύμπτωτο $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και

το διάνυσμα $\vec{v}=(\alpha,-\beta)\parallel$ στην ασύμπτωτο $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

$$\text{συν}(\widehat{\vec{v},\vec{u}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{\alpha\alpha-\beta\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=$$

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2-(\gamma^2-\alpha^2)}{\gamma^2}=$$

$$\frac{\alpha^2-\gamma^2+\alpha^2}{\gamma^2}=\frac{2\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}\overset{*}{=}$$

$$\frac{2\alpha^2-(\alpha\varepsilon)^2}{(\alpha\varepsilon)^2}=\frac{2\alpha^2-\alpha^2\varepsilon^2}{\alpha^2\varepsilon^2}=$$

$$\frac{\alpha^2(2-\varepsilon^2)}{\alpha^2\varepsilon^2}=\frac{2-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$$

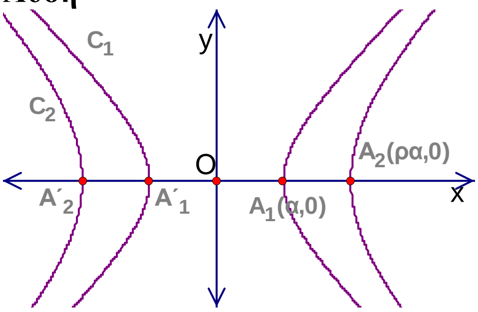
* Είναι $\frac{\gamma}{\alpha}=\varepsilon \Rightarrow \gamma=\alpha\varepsilon$

6.

Έστω οι υπερβολές $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=\rho^2$, $\rho>1$.

Αν A'_1, A_1 και A'_2, A_2 είναι οι κορυφές των C_1 και C_2, αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι, από το A_2 δεν άγονται εφαπτόμενες στη C_1, ενώ από το A_1 άγονται εφαπτόμενες στη C_2.

Λύση



Έστω ότι, από το A_2 άγεται εφαπτομένη $\varepsilon: \beta^2 x_1 x-\alpha^2 y_1 y=\alpha^2\beta^2$ στη C_1.

$A_2 \in \varepsilon \Rightarrow \beta^2 x_1 \rho\alpha-\alpha^2 y_1 .0=\alpha^2\beta^2$

$\rho x_1=\alpha$

$|\rho x_1|=\alpha$ **(1)**

Αλλά $|x_1|>\alpha \Rightarrow \rho|x_1|>\rho\alpha \Rightarrow |\rho x_1|>\rho\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha>\rho\alpha \Rightarrow 1>\rho$ άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει τέτοια εφαπτομένη.

Έστω $\zeta: \beta^2 x_2 x-\alpha^2 y_2 y=\rho^2\alpha^2\beta^2$ εφαπτομένη της C_2 που άγεται από το A_1, όπου (x_2, y_2) το σημείο επαφής.

$A_1 \in \zeta \Rightarrow \beta^2 x_2 \alpha-\alpha^2 y_2 \cdot 0=\rho^2\alpha^2\beta^2 \Rightarrow x_2=\rho^2\alpha$.

Αλλά $\beta^2 x_2^2-\alpha^2 y_2^2=\rho^2\alpha^2\beta^2 \Rightarrow$

$\beta^2\left(\rho^2\alpha\right)^2-\alpha^2 y_2^2=\rho^2\alpha^2\beta^2$

$\beta^2\rho^4\alpha^2-\alpha^2 y_2^2=\rho^2\alpha^2\beta^2$

$\beta^2\rho^4-y_2^2=\rho^2\beta^2$

$\beta^2\rho^4-\rho^2\beta^2=y_2^2$

$y_2^2=\rho^2\beta^2(\rho^2-1)$ Άρα $y_2=\pm\rho\beta\sqrt{\rho^2-1}$

Δηλαδή, υπάρχει σημείο επαφής (x_2, y_2), άρα υπάρχει εφαπτομένη.